TD 09 – Révisions

Rappel : Lorsqu'aucune précision n'est donnée quand au problème **SAT**, il s'agit de celui-ci :

SAT
entrée : une formule propositionnelle ϕ en forme normale conjonctive.
question : ϕ est-elle satisfaisable ?

Exercice 1. *sur la taille des entrées et des entiers*

✎ Ecrire un algorithme qui décide si un entier n est premier (on ne demande pas qu'il soit efficace). Préciser sa complexité, c'est-à-dire son temps de calcul.

Exercice 2. P *et la complémentation*

Si A est un problème de décision, on nomme *complémentaire* de A, et on note co-A, le problème de décision obtenu à partir de A en inversant instances positives et instances négatives. Autrement dit, les instances (entrées) de A et co-A sont les mêmes, mais on pose $x \in$ co-A ssi $x \notin A$ (de façon équivalente, on peut définir co-$A = {}^cA = \Sigma_A^* \setminus A$).
Ainsi, le complémentaire du problème **SAT** est le problème **co-SAT** défini par :

co-SAT
entrée : une formule propositionnelle ϕ.
question : ϕ est-elle non-satisfaisable ?

✎ Montrer que la classe P est close par complémentation, c'est-à-dire que pour tout problème $A \in \mathsf{P}$, on a co-$A \in \mathsf{P}$.

Exercice 3. **Noyau $\leq_m^p$ SAT**

Un *noyau* d'un graphe orienté $G = (V, A)$ est un ensemble N de sommets indépendants (aucune arrête entre deux sommets de N) et tel que tout sommet extérieur à N a un successeur dans N. Autrement dit, $N \subseteq V$ est un noyau s'il satisfait les deux contraintes :

$$(\mathbf{i}) \quad \forall x, y \in N \ : \ (x, y) \notin A \qquad\qquad (\mathbf{ii}) \quad \forall x \notin N \ : \ \exists y \in N \ : \ (x, y) \in A$$

On définit alors le problème **Noyau** ci-dessous :

Noyau
entrée : un graphe orienté $G = (V, A)$.
question : G admet-il un noyau ?

1. Donner un exemple de graphe $G_1 \in$ **Noyau**, et un exemple de graphe $G_2 \notin$ **Noyau**.
2. Montrer que **Noyau** $\in \mathsf{NP}$.
3. Montrer que **Noyau** $\leq_m^p$ **SAT**, sans utiliser la question 2.
4. Montrer que **Noyau** est NP-complet. (Indice : réduire depuis **SAT**.)