
Examen – 3 heures – documents non-autorisés

Ce sujet comporte 2 pages et 7 exercices. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1.*Machine de Turing (4 points)*

Soit $L = \{ w_1 w_2 \dots w_n \in \{0,1\}^* \mid w_2 = w_n \text{ et } n \equiv 1 \pmod{3} \}$.

On rappelle que la relation de *congruence* ($x \equiv y \pmod{z}$) signifie $(x \pmod{z}) = (y \pmod{z})$.

1. Donner un exemple de mot qui appartient à L .
2. Donner un exemple de mot qui n'appartient pas à L .
3. Donner une machine de Turing déterministe pour décider le langage L .
4. Donner une borne sur le temps d'exécution de votre machine.

Exercice 2.*Questions de cours (2.5 points)*

Définir les notions suivantes en complétant les débuts de phrase. On notera \leq_m^p les réductions many-one polynomiales.

1. Les deux lettres de NP signifient respectivement ...
2. Un problème A est NP-difficile (pour \leq_m^p) si et seulement si ...
3. Un problème A est NP-complet (pour \leq_m^p) si et seulement si ...
4. Une machine de Turing non-déterministe M accepte un mot x si et seulement si ...

Exercice 3.*Compréhension du cours (1.5 points)*

Pour chacun des énoncés de chacune des questions, indiquer s'il est vrai ou faux.

1. Si $\text{SAT} \in P$ alors :
 - (a) $\text{Clique} \in NP$;
 - (b) Tous les problèmes NP-difficiles sont dans P ;
 - (c) $P = NP$.
2. Si $P \neq NP$ alors :
 - (a) $\text{SAT} \notin P$;
 - (b) $\text{co-}P \neq P$;
 - (c) Aucun problème NP-difficile n'est dans P .

Exercice 4.*Taille des entrées (2 points)*

Soit l'algorithme suivant, avec $\text{test}(i, x)$ un test inconnu qui prend une unité de temps.

```

monalgo(entier x)
  entier y <- x+5
  pour i de 1 à y faire
    si test(i, x) alors
      rejeter
  accepter

```

1. Donner une borne supérieure sur le temps d'exécution de cet algo en fonction de la taille de l'entrée, en justifiant.

Exercice 5.**SAT-FND** \in P (2 points)

Une formule sous *forme normale disjonctive* (FND) est une disjonction de conjonctions de littéraux, comme par exemple $(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_1) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_1 \wedge \neg x_3) \vee (x_3 \wedge \neg x_5 \wedge \neg x_2 \wedge x_4)$.

SAT-FND

entrée : une formule ϕ sous forme normale disjonctive.

question : ϕ est-elle satisfaisable ?

1. Donner un exemple d'instance négative de **SAT-FND**.
2. Montrer que le problème **SAT-FND** appartient à la classe P.

Exercice 6.**Edge dominating set** (5 points)**Edge dominating set**

entrée : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier $k \in \mathbb{N}$.

question : existe-t-il un sous ensemble $E' \subseteq E$ tel que $|E'| \leq k$ et toute arête de E partage une extrémité avec au moins une arête de E' ?

1. Donner un exemple d'instance positive de **Edge dominating set**.
2. Montrer que le problème **Edge dominating set** appartient à la classe NP.

Dominating set

entrée : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier $k \in \mathbb{N}$.

question : existe-t-il un sous ensemble $V' \subseteq V$ tel que $|V'| \leq k$ et tout sommet de V est adjacent à au moins un sommet de V' ?

Résultat que nous admettons : **Dominating set** est NP-complet.

3. Montrer que **Edge dominating set** est NP-difficile.
4. Que peut-on conclure des réponses de cet exercice ?

Exercice 7.**Ensemble Indépendant** \leq_m^p SAT (4 points)

On rappelle qu'un ensemble indépendant dans un graphe non-orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets $V' \subseteq V$ tel que pour tous $u, v \in V'$ on a $\{u, v\} \notin E$.

Ensemble indépendant

entrée : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier $k \in \mathbb{N}$.

question : G contient-il un ensemble indépendant de taille k ?

Le but de cet exercice est de donner une réduction de **Ensemble Indépendant** à **SAT**.

1. Donner le type de cette réduction : que doit-on transformer en quoi ?
2. Quelles sont les propriétés que doit vérifier cette transformation pour être une réduction many-one polynomiale ?
3. Donner une telle transformation.

Indice : on pourra prendre $|V| \times k$ variables.

Indication : on ne demande pas que la formule soit sous forme-normale conjonctive.

Demandé 1 : donner la sémantique (c-à-d l'idée d'encodage) utilisée pour les variables.

Demandé 2 : donner la liste des contraintes implémentées dans votre formule.

Attention : on ne demande pas de justifier les propriétés de la question précédente, on demande simplement de donner la transformation, et les points **Demandé 1, 2**.