Domaine Sciences et Technologies
Portail 1 René Descartes

Introduction à l'informatique : TD 8
Code UE : S14IN1I1

Année 2019-20

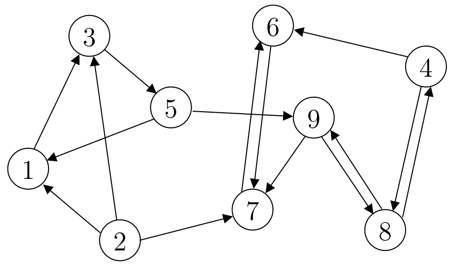
Graphes 2

Exercice 1 (Connexité)

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté (resp. orienté) et u et v deux sommets. Une *chaîne* (resp. un *chemin*) de u à v, notée $\mu(u, v)$ (resp. noté $\mu[u, v]$), est une suite d'arêtes (resp. d'arcs) reliant u à v.

Un graphe est *connexe* si, pour tout couple de sommets u et v, soit $u = v$, soit il existe une chaîne $\mu(u, v)$. Par ailleurs, un graphe orienté est *fortement connexe* si, pour tout couple de sommets u et v, soit $u = v$, soit il existe un chemin $\mu[u, v]$ et un chemin $\mu[v, u]$. Par ailleurs, on dit qu'un tel graphe est connexe si sa version non orientée l'est.

Considérons le graphe orienté $G = (S, A)$ suivant :



1. Transformez G en sa version non orientée $G' = (S, A')$.
2. Le graphe G' ainsi obtenu est-il connexe ? Que pouvez-vous en déduire sur le graphe orienté G ?

Le problème de la connexité forte des graphes orientés se pose assez souvent quand on décide d'étudier de tels graphes. Reprenons la définition donnée plus haut et dégageons de celle-ci le concept de composante fortement connexe. La relation $u\mathcal{R}v \iff (u = v)$ ou $(\exists\mu[u, v]$ et $\mu[v, u])$ est une relation d'équivalence sur S dont les classes d'équivalence forment une partition $\{S_1, \ldots, S_p\}$. Les sous-graphes $C_1, \ldots, C_p$ engendrés par les sous-ensembles $S_1, \ldots, S_p$ sont les *composantes fortement connexes* de G. Ces composantes fortement connexes sont très utiles. En mathématiques par exemple, les calculer peut par exemple permettre de calculer les points fixes et cycles limites d'une fonction ou de ses itérées. En informatique, et plus précisément dans le domaine des réseaux, elles donnent des informations sur les liens physiques ou logiques entre des machines. Dans d'autres disciplines, elles permettent de souligner des rétroactions entre des entités, quelles qu'elles soient. Pour les calculer, il existe une méthode très simple (malheureusement pas optimale). Tout d'abord, soit $\mu[u, v]$ un chemin de u à v tel que $\mu[u, v] = ((u, x), (x, y), (y, z), (z, v))$. On appelle x, y, z, v des *successeurs* de u. L'ensemble des successeurs de u est noté $\mathsf{Succ}(u)$. Inversement, on appelle u, x, y, z des *prédecesseurs* de v. L'ensemble des prédécesseurs de v est noté $\mathsf{Pred}(v)$. Sur cette base, pour calculer les sommets appartenant à la composante fortement connexe d'un sommet u, il suffit de calculer :

$$\{u\} \bigcup \Big(\mathsf{Pred}(u) \bigcap \mathsf{Succ}(u)\Big) .$$

Une fois ces sommets obtenus, la composante fortement connexe de u est le sous-graphe dont l'ensemble des sommets est donné ci-dessus et dont l'ensemble des arcs contient tous les arcs reliant lesdits sommets entre eux.

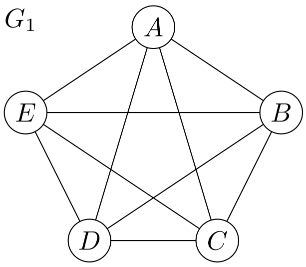
3. Calculez la.es composante.s fortement connexe.s de G en évitant les étapes inutiles et déduisez-en si G est fortement connexe.
4. Écrivez l'algorithme de signature `Procédure CFC(d` $G = (S, A)$) qui calcule les composantes fortement connexes d'un graphe orienté G selon le principe mis en exergue.

Exercice 2 (Cycles eulériens)

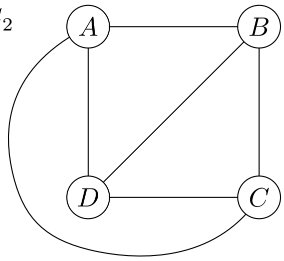
Un graphe non orienté connexe admet un cycle qui traverse chaque arête une et une seule fois si et seulement si chaque sommet est de degré pair. Un tel cycle est dit *eulérien*.

1. Lesquels des graphes suivants admettent un cycle eulérien ?

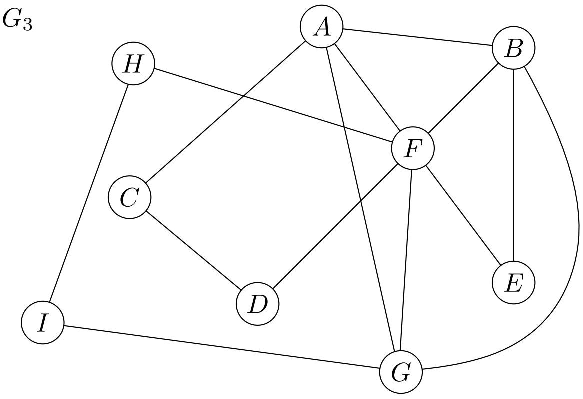
G_1



G_2



G_3



L'algorithme de Hierholzer vu en cours, dont la description suit, nous permet de trouver un cycle eulérien (s'il en existe) de façon efficace :

— Choisir n'importe quel sommet initial v.

— Suivre un chemin arbitraire d'arêtes jusqu'à retourner à v, obtenant ainsi un cycle partiel c.

— Tant qu'il y a des sommets u dans le cycle c avec des arêtes encore inexplorées **faire**

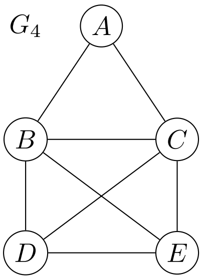
  — Suivre un chemin de sommets à partir de u jusqu'à retourner à u, obtenant un cycle c'.

  — Prolonger le cycle c par c'.

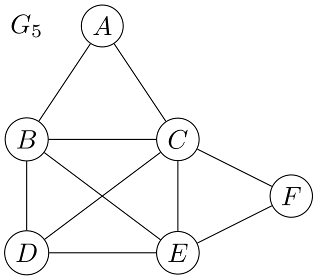
À noter qu'en toute généralité, un graphe eulérien peut admettre plusieurs cycles eulériens différents.

2. Pour chacun des graphes précédents qui admet un cycle eulérien, trouvez-en au moins un en appliquant l'algorithme de Hierholzer et énumérez les sommets traversés le long du cycle.
3. La notion de cycle eulérien peut être étendue : une *chaîne eulérienne* est une chaîne (pas nécessairement un cycle) qui traverse chaque arête du graphe une et une seule fois. Parmi les graphes suivants, quels sont ceux pour lesquels vous pouvez trouver une chaîne eulérienne ?

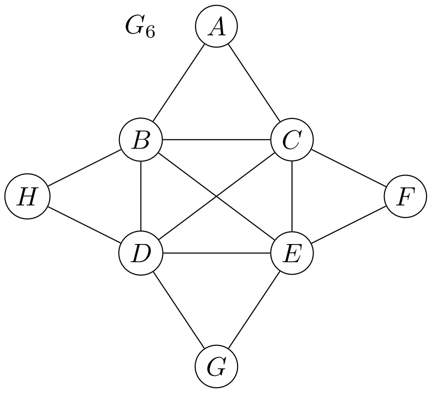
G_4



G_5



G_6



4. À partir de vos observations, conjecturez une caractérisation des chaînes eulériennes en termes de degré des sommets du graphe (ressemblant à la caractérisation des cycles eulériens).

Exercice 3 (Coloration de graphes)

L'algorithme de Welsh-Powell vu en cours, dont la description suit, permet de colorier les sommets d'un graphe de manière que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes :

— Trier les sommets du graphe par ordre de degré décroissant.

— couleur := 0 (*couleur initiale*).

— **Tant qu**'il y a encore des sommets non coloriés **faire**

  — Parcourir la liste triée des sommets et colorier en *couleur* les sommets non coloriés qui ne sont pas voisins à d'autres sommets de la même couleur.

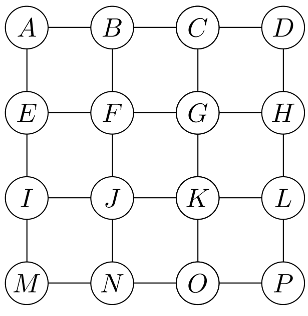
  — couleur := couleur + 1 (*choisir une nouvelle couleur*).

(Ici on utilise les entiers naturels en tant que couleurs.)

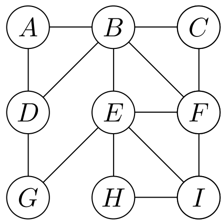
Dans les exercices qui suivent, à chaque fois que deux sommets ont le même degré, *choisissez toujours le premier selon l'ordre lexicographique d'abord*. Par exemple, si les sommets A, D, B sont tous de degré 3, on suppose qu'ils seront triés dans l'ordre A, B, D.

1. Coloriez les graphes suivants à l'aide de l'algorithme de Welsh-Powell.

G_1



G_2

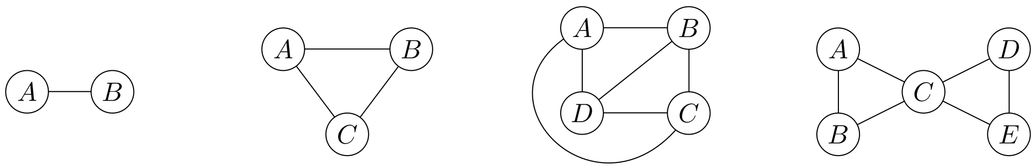


2. Est-ce que les colorations obtenues sont optimales en termes du nombre de couleurs utilisées ? Pourquoi ? Si ce n'est pas le cas, trouvez de meilleures colorations.

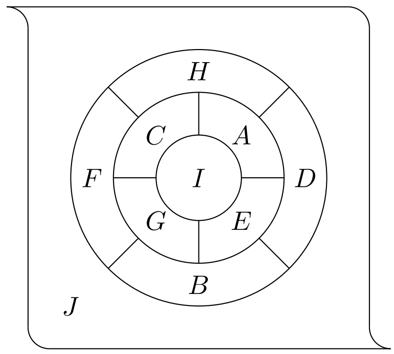
Exercice 4 (Coloration de cartes)

Chaque carte est associée à un *graphe planaire* (un graphe qu'on peut dessiner sur une feuille de papier sans qu'aucune des arêtes n'en croise une autre) et, vice versa, chaque graphe planaire est associé à une carte (non nécessairement unique). Chaque région de la carte correspond à un sommet et chaque frontière entre régions à une arête.

1. Dessinez une "carte" pour chacun des graphes suivants. Notez qu'il est parfois nécessaire de dessiner une région qui entoure les autres.



2. À l'aide de l'algorithme de Welsh-Powell, coloriez la carte suivante. Notez que la région externe J correspond, elle aussi, à l'un des sommets du graphe associé. (Comme dans l'exercice précédent, si deux sommets ont le même degré, choisissez d'abord le plus petit selon l'ordre lexicographique.)



3. La coloration ainsi obtenue est-elle optimale en termes du nombre de couleurs ? Pourquoi ? Si ce n'est pas le cas, essayez de trouver une coloration meilleure.