

## 5 TD 5. Variables aléatoires discrètes

### Rappels du cours

1. Variables aléatoires
2. Loi de probabilité  $P\{X = a\}$  d'une variable aléatoire continue
3. Fonction de densité de probabilité  $p(a)$
4. Fonction de répartition  $F(a) = \sum_{x \leq a} p(x)$
5. Espérance  $E[X]$  et variance  $Var[X]$  d'une variable aléatoire discrète
6. Lois de Bernoulli, binomiale, de Poisson

**Exercice 5.1:** On choisit deux boules au hasard d'une urne en contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2€ pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1€ pour chaque boule blanche tirée. Désignons les gains nets par  $X$ .

- (a) Quelles sont les valeurs  $a$  possibles pour la variable aléatoire  $X$  ?
- (b) Quelles sont les probabilités  $P\{X = a\}$  associées à ces valeurs ?
- (c) Dessinez le graphe de cette loi de probabilité, avec  $X$  en abscisse et  $P\{X = a\}$  en ordonnée.
- (d) Quelle est la probabilité que le gain  $X$  soit négatif (c'est-à-dire, une perte) ?
- (e) Quel est le gain espéré, c'est-à-dire  $E[X]$  ?

**Exercice 5.2:** Quatre bus transportant 148 élèves de la même école arrivent à un stade de football. Les bus transportent respectivement 40, 33, 25 et 50 élèves. Un des étudiants est choisi au hasard. Soit  $X$  le nombre d'étudiants qui était dans le bus de cet élève choisi aléatoirement. Un des quatre chauffeurs de bus est également choisi au hasard. Soit  $Y$  le nombre d'élèves dans son bus.

- (a) Entre  $E[X]$  et  $E[Y]$ , de laquelle diriez-vous qu'elle est la plus grande ? Pourquoi ?
- (b) Calculer  $E[X]$  et  $E[Y]$
- (c) Calculer  $Var[X]$  et  $Var[Y]$ .

**Exercice 5.3:** Étant donné la définition de l'espérance  $E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x)$  d'une variable aléatoire discrète  $X$ , démontrez la linéarité de l'espérance, c'est à dire, démontrez que  $E[aX + b] = aE[X] + b$

**Exercice 5.4:** On considère une roue de roulette comprenant 38 cases numérotées 0, 00 et de 1 à 36. Smith parie régulièrement sur la sortie des numéros 1 à 12.

- (a) Quelle est la probabilité qu'il perde ses 5 premiers paris ?
- (b) Quelle est la probabilité que son premier gain survienne lors du quatrième tirage ?

**Exercice 5.5:** On pose deux questions au participant d'un jeu télévisé. Il peut choisir l'ordre dans lequel il va répondre à ces questions, numérotées 1 et 2. S'il répond juste à la première question, il est autorisé à continuer avec la seconde, sinon il doit s'arrêter. Il recevra  $V_1 = 200$  pour une bonne réponse à la question 1 et  $V_2 = 100$  pour une bonne réponse à la question 2. S'il répond aux deux questions, il gagnera 300€. Supposons que la probabilité avec laquelle il répondra juste à la question 1 est de  $P_1 = 0,6$ , et de  $P_2 = 0,8$  pour la question 2.

- (a) A quelle question doit-il répondre d'abord pour maximiser son gain prospectif ? On admet que les deux questions sont indépendantes.

(b) Pour quelles valeurs de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $P_1$  et  $P_2$  il vaut mieux commencer par la question 1 ?

**Exercice 5.6:**  $A$  et  $B$  sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs identiques. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité  $p$  de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion a le plus de chances d'arriver à destination (en fonction de la valeur de  $p$ ) ?

**Exercice 5.7:** On sait que les vis fabriquées par une certaine société sont affectées d'un défaut avec probabilité 0,01 ; l'état d'une vis est indépendant de celui des précédentes ou suivantes. La société accepte de rembourser les paquets de 10 vis qu'elle vend si plus d'une des vis présente un défaut. Quelle proportion des paquets vendus la société s'expose-t-elle à devoir rembourser ?

**Exercice 5.8:** Un examen est administré sous forme d'un questionnaire de 5 questions à 3 choix multiples chacune. Quelle est la probabilité qu'un étudiant obtienne 4 bonnes réponses ou plus en devinant ?

**Exercice 5.9:** Chacun des 7 jurés d'un jury d'assises prend une décision correcte avec une probabilité de 0,7. Sachant que la décision du jury est prise par vote majoritaire (au moins 4 votes) :

- (a) Quelle est la probabilité que le jury prenne la bonne décision ?
- (b) Quelle est la probabilité que le jury prenne la bonne décision sachant que exactement 4 jurés sont d'accord ?

**Exercice 5.10:** L'espérance du nombre d'erreurs typographiques sur une page d'un certain magazine est 0,2. Quelle est la probabilité que la prochaine page lue contienne :

- (a) 0 erreurs typographiques ?
- (b) 2 erreurs typographiques ou plus ?
- (c) Quelle est l'espérance du nombre d'erreurs typographiques par page ?
- (d) Sachant que la probabilité d'erreur typographique d'un caractère pris indépendamment des autres est de 0,001, et que le nombre de caractères par page est de 200, recalculez la valeur exacte des probabilités ci-dessus.

**Exercice 5.11:** Un industriel achète les transistors par lots de 20. Sa stratégie consiste à tester seulement 4 transistors par lot, pris au hasard, et à n'accepter le lot que si tous sont en bon état. La probabilité pour un transistor isolé d'être défectueux est 0,1, ceci indépendamment de l'état des autres transistors.

- (a) quelle proportion des lots sera refusée par l'industriel ?
- (b) Quel est le nombre espéré de transistors défectueux par lot ?
- (c) Quelle est la variance du nombre de transistors défectueux par lot ?

**Exercice 5.12:** On répète une expérience Bernoulli avec la probabilité du succès  $p$ , jusqu'à premier succès. Quel est le nombre espéré des tirages ?

**Exercice 5.13:** On tire les cartes une après l'autre parmi les 52 cartes et chaque fois on essaie de deviner leur valeur. Quel est le nombre espéré des cartes correctement devinées si

- (a) on ne se souvient pas des cartes déjà sorties ;
- (b) on se souvient des cartes déjà sorties.

**Exercice 5.14:** (coupon collecteur) Un collectionneur cherche à avoir toutes les vignettes d'une série de  $n$  vignettes dans les boîtes de céréales, mais à l'achat d'une boîte, le numéro de la vignette est inconnu. La question est : combien faut-il acheter de boîtes de céréales pour avoir la collection complète ?