
TD 05 – The complexity cake

Exercice 1.*Tranches de cake***Rappel :** un diagramme de Venn montre les relations (d'inclusion) entre ensembles.**Rappel :** une classe de complexité (en temps) est un ensemble de langages, défini à partir d'un ensemble d'algorithmes (ceux dont le temps d'exécution respecte une borne donnée).

1. Dessiner en justifiant le diagramme de Venn des classes suivantes : NEXP, P, EXP, NP.

Rappel : pour une classe de complexité \mathcal{C} , on définit $co\mathcal{C} = \{^cA \mid A \in \mathcal{C}\}$, avec cA le langage complémentaire de A .

2. Ajouter en justifiant les classes suivantes : $coNP$, coP , $coNEXP$, $coEXP$.
3. Citer deux inclusions connues pour être strictes.
4. Quelle est la question à 1 000 000 \$? (de la part du *Clay Mathematics Institute*)
5. Citer une autre question dont la réponse, si elle est négative, donne droit aux 1 000 000 \$.

Exercice 2.*Ranger sa chambre*

Pour chacun des problèmes suivants, donner la (plus petite) classe (possible) à laquelle il appartient, en justifiant.

Rappel : pour justifier que le langage associé à un problème appartient à une classe, on donne un *algorithme* dans cette classe, qui le *décide*.**SAT**

1. *entrée :* une formule propositionnelle ϕ
question : est-ce que $mod(\phi) \neq \emptyset$?

2-SAT

2. *entrée :* une formule propositionnelle ϕ dont les clauses sont de taille exactement 2
question : est-ce que $mod(\phi) \neq \emptyset$?

3. $L_{2SAT+} = L_{2SAT} \cup \{a01bb, t11wu\}$.

Clique

4. *entrée :* un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier k
question : G contient-il une clique de taille k ? ($V' \subseteq V$ est une clique ssi $\forall v, v' \in V' : (v, v') \in E$, où E est l'ensemble des arêtes non-orientées du graphe G)

Accessibilité

5. *entrée :* un graphe orienté G et deux sommets s et t
question : existe-t-il un chemin de s à t dans G ?

Set packing

6. *entrée :* une famille $\{S_j\}_{j \in \{1, \dots, m\}}$ d'ensembles tels que $S_j \subseteq \{1, \dots, n\}$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, et un entier $\ell \in \mathbb{N}$
question : $\{S_j\}$ contient-il ℓ ensembles mutuellement disjoints ?

Node cover

7. *entrée* : un graphe $G = (V, E)$ et un entier ℓ
question : existe-t-il un sous ensemble $V' \subseteq V$ tel que $|V'| \leq \ell$ et toute arête de E a l'une de ses extrémités dans V' ?

Directed Hamiltonian circuit

8. *entrée* : un graphe orienté $G = (V, A)$
question : existe-t-il un circuit dans G qui inclue chaque sommet exactement une fois ?