Contrôle Continu – Probabilité pour l'informatique

Nom : ....
Prénom : ....
Groupe : ....

Consignes

— Aucun document n'est autorisé.
— Calculette non autorisée : indiquez vos réponses sous forme de fractions.
— **On vous demande des réponses concises et *toujours bien justifiées*.**

Exercice 1. *Analyse Combinatoire*

1. (1pt) De combien de manières peut-on choisir r objets parmi n si l'ordre de tirage est significatif ? Et si l'ordre n'est pas significatif ?

☞ Si l'ordre de tirage n'est pas significatif $\binom{n}{r}$. Si l'ordre est significatif (par ex. dans la plaque d'une voiture) $\frac{n!}{(n-r)!}$

2. (2pt) On doit asseoir en rang 4 américains, 3 français et 3 anglais. Les personnes de même nationalité doivent rester ensemble. Combien de dispositions peut-on imaginer ?
☞ Il y a 4! façons d ?arranger les américains entre eux, 3! façons d'arranger les français entre eux et 3! façons d ?arranger les anglais entre eux. Il y a aussi 3! façons d ?arranger les 3 nationalités. Donc on a en tout $4!3!3!3! = 5184$ façons.

3. (1,5pt) Dans un groupe de 8 femmes et 6 hommes, on doit former un comité de 3 hommes et 3 femmes. Combien de comités différents peut-on former si :

— 2 des hommes refusent d'être ensemble dans le comité ?
☞
$$\binom{8}{3}\left[\binom{2}{0}\binom{4}{3}+\binom{2}{1}\binom{4}{2}\right]=\binom{8}{3}\binom{6}{3}-\binom{2}{2}\binom{4}{1}\binom{8}{3}=896$$

— 2 des femmes refusent d'être ensemble dans le comité ?
☞
$$\binom{6}{3}\left[\binom{2}{0}\binom{6}{3}+\binom{2}{1}\binom{6}{2}\right]=\binom{8}{3}\binom{6}{3}-\binom{2}{2}\binom{6}{1}\binom{6}{3}=1000$$

— 1 homme et 1 femme refusent d'être ensemble dans le comité ?
☞
$$\binom{7}{3}\binom{5}{3}+\binom{1}{1}\binom{7}{2}\binom{5}{3}+\binom{7}{3}\binom{1}{1}\binom{5}{2}=\binom{6}{3}\binom{8}{3}-\binom{7}{2}\binom{5}{2}=910$$
On ne choisit ni l'homme ni la femme problématiques (3 parmi 7 et 3 parmi 5), ou alors on choisit la femme problématique, 2 autres femmes (2 parmi 7) et 3 hommes parmi les non-problématiques (3 parmi 5), ou alors on choisit 3 femmes parmi les non-problématiques (3 parmi 7), l'homme problématique, et 2 autres hommes (2 parmi 5).

4. (1pt) Développez :
$$(x_1+2x_2)^4$$

☞

$$(x_1 + 2x_2)^4 = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} x_1^i (2x_2)^{n-i} = x_1^4 + 8x_1^3 x_2 + 24x_1^2 x_2^2 + 32x_1 x_2^3 + 16x_2^4$$

5. (1pt) Démontrez l'égalité ci-dessous :

$$i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1} \tag{1}$$

☞ Preuve par induction :
Base $i = 1$:

$$1\binom{n}{1} = 1 \times \frac{n!}{1!(n-1)!} = n = n \times \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} = n \times \binom{n-1}{0}$$

Pas : Supposons la proposition vraie pour i, alors :

$$(i+1)\binom{n}{i+1} = n\binom{n-1}{(i+1)-1}$$

Preuve directe :

$$\begin{aligned} i\binom{n}{i} &= i \times \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= i \times \frac{n \times (n-1)!}{i \times (i-1)!(n-1-(i-1))!} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-(i-1))!} \\ &= n \times \binom{n-1}{i-1} \end{aligned}$$

Exercice 2. *Axiomes et calculs des probabilités*

1. (2pt) Démontrez les égalités ci-dessous :

$$P(E \cap \overline{F}) = P(E) - P(E \cap F)$$
$$P(\overline{E} \cap \overline{F}) = 1 - P(E) - P(F) + P(E \cap F)$$

☞ Pour démontrer $P(E \cap \overline{F}) = P(E) - P(E \cap F)$
(a) Comme $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F})$ par l'axiome 3 ($E \cap F$ et $E \cap \overline{F}$ sont mutuellement exclusifs), alors :
$P(E \cap \overline{F}) = P(E) - P(E \cap F)$
(b) En utilisant la définition de probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} P(E \cap \overline{F}) &= P(E) \times P(\overline{F}|E) \\ &= P(E)[1 - P(F|E)] \\ &= P(E) - P(E) \times P(F|E) \\ &= P(E) - P(E \cap F) \end{aligned}$$

☞ Pour démontrer $P(\overline{E}\cap\overline{F}) = 1 - P(E) - P(F) + P(E\cap F)$:
(a) Avec De Morgan :
$1 - P(E) - P(F) + P(E\cap F) = 1 - P(E\cup F) = P(\overline{E\cup F}) = P(\overline{E}\cap\overline{F})$
(b) En utilisant la définition de probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned}
P(\overline{E}\cap\overline{F}) &= P(\overline{E}) \times P(\overline{F}|\overline{E}) \\
&= P(\overline{E}) \times [1 - P(F|\overline{E})] \\
&= P(\overline{E}) - P(\overline{E}) \times P(F|\overline{E}) \\
&= 1 - P(E) - P(F) \times P(\overline{E}|F) \\
&= 1 - P(E) - P(F) \times [1 - P(E|F)] \\
&= 1 - P(E) - P(F) + P(F) \times P(E|F) \\
&= 1 - P(E) - P(F) + P(E\cap F)
\end{aligned}$$

(c) Si on considère la première proposition $P(E\cap F) = P(E) - P(E\cap\overline{F}$, alors :
$P(\overline{E}\cap\overline{F}) = P(\overline{E}) - P(\overline{E}\cap F) = 1 - P(E) - [P(F) - P(E\cap F)] = 1 - P(E) - P(F) + P(E\cap F)$

2. (2pt) On jette deux dés. On note par E l'événement "la somme des dés est paire", par F l'événement "au moins un des dés montre 3" et par G "la somme des dés vaut 6". Décrire les événements $E\cap F$, $E\cup F$, $E\cap\overline{F}$ et $E\cap F\cap G$
☞ La somma de deux dés est paire et au moins un des dés montre 3 :
$\{(3,1),(3,3),(3,5)\}$
☞ La somma de deux dés est paire ou au moins un des dés montre 3
$\{(1,1),(1,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(2,2),(2,4),(2,6),(4,4),(4,6),(6,6)\}$
☞ La somma de deux dés est paire et aucun des dés montre 3 :
$\{(1,1),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(4,4),(4,6),(6,6)\}$
☞ La somma de deux dés est paire et au moins un des dés montre 3 et la somme des dés vaut 6 $\Longrightarrow$ les 2 dés valent 3 : $\{(3,3)\}$

3. (1pt) Quelle est la probabilité de tirer au moins un 6 lorsque l'on jette un dé équilibré 4 fois.
☞ $p_6 = 1 - \overline{p_6} = 1 - (\frac{5}{6})^4 = 0,5177$
☞ Alternativement : $p_6 = 1/6 + 5/6 * 1/6 + 5/6 * 5/6 * 1/6 + 5/6 * 5/6 * 5/6 * 1/6 = 0,5177$

4. (2pt) Une main de poker de 5 cartes est appelée *main pleine* si elle comprend 3 cartes de même valeur/rang et 2 autres cartes, aussi de même valeur/rang. Une main pleine comprend donc trois cartes d'une valeur (p.ex. 3 ♡, 3 ♠, 3 ♣) plus une paire (p.ex. K ♣, K ♢). Quelle est la probabilité de se voir distribuer une main pleine ?
☞ $\dfrac{13\cdot 12\binom{4}{2}\binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,0014$ – (Sheldon Ross, page 37)

5. (1,5pt) Une équipe de football est composée de 20 joueurs attaquants et 20 joueurs défensifs. Le joueurs doivent être regroupés par paires pour qu'on puisse composer des chambres de deux. Si le regroupement est fait au hasard, quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas de paires mixtes (1 attaquant + 1 défensif) de camarades de chambre ? Quelle est la probabilité qu'il y ait $2i$ paires mixtes, $i = 1,2,3,..,10$?
☞ $P_0 = \dfrac{\left(\frac{20!}{2^{10}10!}\right)^2}{\frac{40!}{2^{20}20!}} = \dfrac{(20!)^3}{(10!)^2 40!}$
☞ $\dfrac{\binom{20}{2i}^2 (2i)!\left(\frac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!}\right)^2}{\frac{40!}{2^{20}20!}}$ (Sheldon Ross, page 39)

1. (2pt) On considère 3 cartes à jouer de même forme. Cependant, les deux faces de la première carte on été colorées en noir, les deux faces de la deuxième carte en rouge, tandis que la troisième carte a une face noire et l'autre rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau puis une carte tirée au hasard en est extraite et placée au sol. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?
☞ $P(RN|R) = \frac{P(RN \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|RN)P(RN)}{P(R|RR)P(RR)+P(R|RN)P(RN)+P(R|RN)P(NN)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}+0\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

2. (1,5pt) Démontrez que, si E et F sont deux événements indépendents, $\overline{E}$ et F le sont aussi.
☞ $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F}) = P(E) \times P(F) + P(E \cap \bar{F}) \Rightarrow P(E \cap \bar{F}) = P(E) \times [1 - P(F)] = P(E) \times P(\bar{F})$
☞ Alternativement :
$P(\overline{E} \cap F) = P(F) \times P(\overline{E}|F) = P(F) \times [1 - P(E|F)] = P(F) \times [1 - P(E)] = P(F) \times P(\overline{E})$
☞ Alternativement :
$P(\overline{E}|F) = \frac{P(\overline{E} \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F) - P(E \cap F)}{P(F)} = 1 - \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = 1 - P(E|F) = 1 - P(E) = P(\overline{E})$, donc $P(\overline{E}|F) = P(\overline{E})$ et les événements sont indépendants.

3. (1,5pt) Une maladie affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. Un examen permet de diagnostiquer cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. En revanche, pour un individu sain, la probabilité de faux positif est de 0,1% (c'est-à-dire, dans 0,1% des cas, le test sera positif alors que la personne n'est pas malade). Si un test est positif, quelle est la probabilité que l'individu soit effectivement malade ? **Indication :** *Considérer les événements M="Etre malade" et son complementaire $\overline{M}$, ainsi que l'événement P="test positif".*
☞ $P(M) = \frac{1}{1000}$
$P(\overline{M}) = \frac{999}{1000}$
$P(P|M) = \frac{990}{1000}$

$$P(M|P) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{P(M)P(P|M)}{P(M)P(P|M) + P(\bar{M})P(P|\bar{M})} = \frac{\frac{990}{1000^2}}{\frac{990+999}{1000^2}} \approx 0,4977$$