

1 TD 1. États quantique, intrication et applications

Rappels du cours

1. Rappeler la différence entre un bit classique et un bit quantique (qubit). Donner l'expression plus générale d'un qubit sur la base de calcul $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.
2. Rappeler le produit scalaire hermitien de deux vecteurs $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ et $|\phi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$
3. Citer le postulat sur les grandeurs observables. Quelle propriété doit-il avoir un tel opérateur ?
4. Rappeler la définition d'opérateur unitaire et expliquer comment un tel opérateur garantit la conservation de la norme d'un état quantique au cours du temps.
5. Enumérer toutes les portes logiques quantiques que vous avez en cours (X, Y, Z, Hadamard, T), prouver qu'elles sont bien unitaires et montrer leur action sur un qubit de la forme $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.
6. Donner un exemple d'état à deux qubit $|\psi\rangle_A = \alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A$ et $|\psi\rangle_B = \alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B$ qui peut être factorisé et sa base de decomposition. Pourriez vous donner un exemple d'état non separable ?

2 Non-clonage quantique

Exercice 2.1: Permutation matrix Soit $a \in \{0, 1\}$ et $|0\rangle, |1\rangle$, une base de calcul. Trouvez une unitaire 4×4 tel que :

$$U : |a\rangle \otimes |a\rangle \rightarrow |a\rangle \otimes |\bar{a}\rangle \quad (1)$$

où \bar{a} denote l'operation NOT appliqué à a .

Exercice 2.2: CNOT La porte CNOT est telle que :

$$|a\rangle \otimes |b\rangle \rightarrow |a\rangle \otimes |a \oplus b\rangle \quad (2)$$

où \oplus est la porte XOR.

1. Montrer que la porte CNOT peut être utilisé pour copier un bit.
2. Montrer que le même processus ne fonctionne plus si le qubit x est une superposition quelconque $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Ceci est une manifestation du fait qu'on peut effectuer une copie d'un bit classique mais pas d'un qubit en general (théorème de non-clonage quantique).

3 Etats de Bell

Exercice 3.1: Bases 1. Déterminer les états obtenus (états de Bell) en injectant dans la porte logique en Fig 1 les quatre états de la base de calcul à deux qubits : $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ (On notera $|\beta_{00}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{11}\rangle$ les états de Bell correspondants).

2. Montrer que ces états sont orthogonaux
3. Prenons l'état $|\beta_{01}\rangle$; on effectue une mesure sur le premiere qubit. Quelle est la probabilité d'obtenir 0 ? On obtient effectivement 0 et on mesure maintenant le deuxieme bit. Quelle est la probabilité d'obtenir 0 ?
4. Répondre aux meme questions en partant de l'état $|\phi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$

5. Dans les expériences de téléportation ou de super dense coding (prochain exercice) deux personnes distantes possèdent chacune un des deux qubits d'une paire dans un état de Bell. La mesure de son qubit par l'une des deux personnes fixe automatiquement la valeur du qubit détenu par l'autre personne. Comment expliquer que cette corrélation qui semble instantanée ne viole pas le principe physique qui dit qu'aucune information ne peut se propager plus vite que la vitesse de la lumière ?

4 Super-dense coding

Exercice 4.1: Alice et Bob Alice dispose de deux bits (classique) d'information à transmettre à Bob ; comment peut-elle faire en sorte que Bob ait connaissance de la valeur de ces deux bits en ne lui envoyant qu'un seul qubit ? (Alice et Bob disposent chacun d'un qubit d'un état de Bell $|\beta_{00}\rangle$).

1. Selon la valeur de la paire de bits classique Alice agit sur son qubit de la façon suivante :

Bits classique	Action sur le qubit	
00	I	
01	X	(3)
10	Z	
11	ZX	

Dans chaque cas quel est l'état de deux qubits résultant de l'action sur le qubit de Alice ?

2. Alice transmet à Bob le qubit transformé. Bob fait agir sur l'état de deux qubits maintenant en sa possession d'abord C-Not puis Hadamard sur le premier qubit. Quel état obtient-il (pour chaque éventualité) ?

3. En déduire qu'en mesurant l'état obtenu dans la base de calcul le résultat est, avec probabilité 100% la paire de bit classique détenue par Alice.