TP 01 – Machines de Turing

Pour ce TP nous allons utiliser le simulateur de machine de Turing `awmorp/jsturing`!
Deux options :
- sur internet : `http://morphett.info/turing/`
- en local : `git clone https://github.com/awmorp/jsturing.git`
  `firefox jsturing/turing.html`

N'oubliez pas de sauvegarder le code de vos machines...

Attention : par rapport aux définitions et notations vues en cours, les machines de Turing de ce TP n'auront qu'un seul ruban, en lecture écriture, et qui sert à la fois de ruban d'entrée, de ruban de travail, et de ruban de sortie ! C'est équivalent du point de vue des classes de complexité P et NP, pour peu que l'on augmente l'alphabet de ruban.

Exercice 1. *nombre de rubans*

✎ S'assurer de bien comprendre la remarque ci-dessus relative au nombre de rubans.

Exercice 2. *Programmer*

Pour chacun des problèmes suivants, il faut :

(a) donner le langage associé,

(b) programmer une machine de Turing pour le décider (on utilisera deux états `halt-accepte` et `halt-rejette`),

(c) donner une borne supérieure et une borne inférieure (les plus proches possibles) à leur temps de calcul dans le pire cas en fonction de la taille de l'entrée.

1. **Parité** ; entrée : un entier $x \in \{0,1\}^*$ codé en binaire ; question : x contient-il un nombre pair de lettre 1 ?
2. **Mod4** ; entrée : un entier $x \in \{0,1\}^*$ codé en binaire ; question : x est-il un multiple de 4 ?
3. **Préfixe** ; entrée : deux mots $x, y \in \{a,b\}^*$ séparés par un symbole $\#$; question : x est-il un préfixe [1] de y ?
4. **Sous-mot** ; entrée : deux mots $x, y \in \{a,b\}^*$ séparés par un symbole $\#$; question : x est-il un facteur [2] de y ?

Exercice 3. $\uparrow$

✎ Programmer une machine de Turing qui ne s'arrête pas.

Exercice 4. *Machines non-déterministes*

Pour chacun des problèmes suivants, il faut :

(a) donner le langage associé,

(b) programmer une machine de Turing non-déterministe pour le décider,

1. $x = x_1, \ldots, x_n$ est un préfixe de $y = y_1, \ldots, y_m$ si et seulement si $n \leq m$ et $\forall j, 1 \leq j \leq n : x_j = y_j$.
2. $x = x_1, \ldots, x_n$ est un facteur du mot $y = y_1, \ldots, y_m$ si et seulement si il existe un indice i, $1 \leq i \leq m - n + 1$, tel que $\forall j, 0 \leq j \leq n-1 : x_{1+j} = y_{i+j}$.

(c) donner une borne supérieure et une borne inférieure à leur temps de calcul dans le pire cas en fonction de la taille de l'entrée,

(d) comparer au temps de calcul d'une machine déterministes décidant le même langage.

1. **Sous-mot** (voir exercice 2.4). Indice : on pourra utiliser la machine déterministe qui décide **Préfixe** (exercice 2.3).
2. **Sous-palindrome4** ; entrée : un mot $x \in \{a, b\}^*$; question : est-ce que x contient un palindrome de taille 4 comme facteur ?

Exercice 5. *Machines qui calculent*

Programmer une machine de Turing qui s'arrête sur toute entrée $x_1, \ldots, x_n$ et, lorsqu'elle s'arrête, laisse inscrit sur son ruban le résultat $f(x)$, et seulement cela (peu importe la position de la tête lors de l'arrêt), pour chacune des fonctions suivantes.

1. $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) = 8x + 3$ avec x un entier écrit en binaire sur l'alphabet $\{0, 1\}$.
2. $f_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x, y) = x + y$ avec x et y écrit en binaire et séparés par un symbole $\#$, sur l'alphabet $\{0, 1, \#\}$.

Exercice 6. *Machines non-déterministes+*

Même questions que l'exercice 4 avec le problème suivant.

1. **Part somme** ; entrée : un ensemble d'entiers $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ codés en binaire et séparés par des symboles $\#$, sur l'alphabet $\{0, 1, \#\}$; question : $\exists\, T \subseteq S$ tel que $\sum_{x_i \in T} x_i = \sum_{x_i \in S \setminus T} x_i$?

Exercice 7. *? ? ?*

✎ Lancer la machine suivante sur l'entrée qui ne contient que des symboles 0 (il faut donc remplacer 0 par _ avec `jsturing`) et deviner son comportement (la machine s'arrête lorsqu'elle est dans l'état q_5 et lit un 0).