Année universitaire 2018/2019

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L2 Nom du diplôme : Licence d'Informatique
Code du module : SIN3U07TA Libellé du module : Probabilite pour l'informatique
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1. *Combinatoire (2pt)*

Sur chaque pièce d'un jeu de dominos figurent deux symboles, qui peuvent être identiques, pris parmi {0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}. L'ordre des deux symboles sur la pièce n'est pas significatif. Deux pièces ne peuvent pas être identiques.

1. Combien y a-t-il de pièces dans un jeu de dominos ?
   ☞ 28 pièces = $\binom{7}{2}$ pièces avec des symboles différents + 7 pièces avec des symboles identiques
2. On considère l'expérience qui consiste è tirer au hasard un domino. Quelle est la probabilité p de tirer un domino qui contient au moins un six ?
   ☞ Il y a 7 pièces contenant 1 six, donc la probabilité est de 7/28=1/4

Exercice 2. *Axiomes des probabilités et indépendance (3pt)*

En France, environ 30% des hommes fument des cigarettes normales et 10% des hommes utilisent la cigarette électronique. La proportion d'hommes qui ne fument aucun type de cigarette (ni normale, ni électronique) est de 63%.

1. Quelle est la proportion d'hommes qui fument les deux types de cigarette ?
   ☞ Si N est l'événement "fumer la cigarette normale" et E "utiliser la cigarette électronique", alors $P(N \cap E) = P(N) + P(E) - P(N \cup E)$. Sachant que $P(\overline{N \cup E}) = 0,63$, $P(N \cup E) = 1 - P(\overline{N \cup E}) = 0,37$, donc $P(N \cap E) = 0,3 + 0,1 - 0,37 = 0,03 = 3\%$ des hommes.
2. Quelle est la proportion d'hommes qui fument uniquement des cigarettes normales, et n'utilisent pas la cigarette électronique ?
   ☞ $P(N \cap \overline{E}) + P(N \cap E) = P(N)$, donc $P(N \cap \overline{E}) = P(N) - P(N \cap E) = 0,3 - 0,03 = 0,27 = 27\%$ des hommes.
3. Les événements N = "fumer la cigarette normale" et E = "utiliser la cigarette électronique" sont-ils indépendants ? Pourquoi ?
   ☞ $P(N \cap E) = 0,03 = 0,3 \times 0,1 = P(N) \times P(E)$ donc oui, les événements sont indépendants.

Exercice 3. *Probabilité conditionnelle (3pt)*

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée. Déterminer :

1. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 ;
2. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 **et** qu'elle soit défectueuse ;
3. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 **sachant** qu'elle est défectueuse.

☞ Notons A l'événement "la pièce provient de l'atelier 1", B l'événement "la pièce provient de l'atelier 2" et D l'événement "la pièce est défectueuse".

3.1 L'énoncé nous dit que les 2/3 des pièces produites proviennent de l'atelier 1. Donc $P(A) = 2/3$.

3.2 $P(A \cap D) = P(D|A) \cdot P(A) = 0,03 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{50}$.

3.3 De la même façon, on obtient $P(B \cap D) = \frac{1}{75}$. Donc $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = \frac{1}{30}$. Ainsi, $P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{3}{5}$.

Exercice 4. *Combinatoire (2pt)*

Considérez trois groupes d'étudiants en L2 informatique contenant le même nombre n d'étudiants chacun. On veut choisir un comité de représentants contenant 3 membres. Les étudiants sont tous distinguables, et l'ordre dans le comité n'est pas significatif.

☞ Précision barème : 0,5 point par question

1. Combien de comités différents peut-on former si on choisit les étudiants au hasard parmi les $3n$ étudiants ?
   ☞ $\binom{3n}{3}$
2. Combien de comités différents peut-on former si on choisit un étudiant par groupe ?
   ☞ n^3
3. Combien de comités différents peut-on former si on choisit trois étudiants du même groupe ?
   ☞ $3 \times \binom{n}{3}$
4. Combien de comités différents peut-on former si on choisit deux étudiants d'un même groupe, et un étudiant d'un autre groupe ?
   ☞ On choisit d'abord 2 groupes parmi les 3, où l'ordre est significatif (car un groupe aura 2 membres du comité, l'autre seulement 1) = $A_3^2 = 6$ Ensuite, on choisit un membre parmi n du groupe 1, et deux membres parmi n du groupe 2. $\binom{n}{2}\binom{n}{1}A_3^2 = 3n^2(n-1)$

Exercice 5. *Theorème de Bayes (2pt)*

Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition d'un six soit de 1/2. On choisit un dé au hasard, on le jette, et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

☞ Précision barème : 1 point pour le numérateur, 1 point pour le dénominateur. 0,5 si uniquement la modélisation est correcte.

On note D l'événement : "le dé est pipé", et S l'événement : "on obtient 6". L'énoncé donne $P(D) = 25/100 = 1/4$ et $P(S|D) = 1/2$. La formule de Bayes nous permet de calculer $P(D|S)$.

Comme on a $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 3/4$ et $P(S|\overline{D}) = 1/6$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}P(D|S) &= \frac{P(D)P(S|D)}{P(D)P(S|D) + P(\overline{D})P(S|\overline{D})} \\ &= \frac{1/4 * 1/2}{1/4 * 1/2 + 3/4 * 1/6} \\ &= \frac{1/8}{1/8 + 1/8} \\ &= 1/2\end{aligned}$$

Exercice 6. *Variables aléatoires discrètes : la loi binomiale (3pt)*

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quelle est la probabilité p qu'une lettre soit affranchie au tarif urgent ?
   ☞ $p = 3/5$
2. Soit X la variable aléatoire discrète "nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres", quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, et quelle est sa variance ?
   ☞ X suit une loi binomiale de paramètres $p = 3/5$ et $n = 10$. Son espérance $E[X] = np = 6$ et sa variance $Var(X) = np(1-p) = \frac{12}{5}$
3. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements : A = "Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent" et B = "Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent".
   ☞ Le nombre de lettres N affranchies au tarif urgent suit une loi binomiale avec $n = 4$ et $p = 3/5$.
   $P(A) = P(N = 2) = \binom{4}{2}(3/5)^2(2/5)^2 = \frac{216}{625}$
   $P(B) = P(N > 0) = 1 - P(N = 0) = 1 - \binom{4}{0}(3/5)^0(2/5)^4 = 1 - \frac{16}{625} = \frac{609}{625}$

Exercice 7. *Variables aléatoires continues : distribution normale (2pt)*

Une tension de bruit électronique est modélisée par une variable réelle aléatoire centrée ($i.e.$ avec espérance nulle), X, qui suit une loi normale f_X de variance σ^2.

1. **1.** Exprimez la variable normale centrée réduite correspondante Z en fonction de X. Quelle est l'espérance et la variance de Z ?
   ☞ $Z = \frac{X}{\sigma}$
   Comme pour toute variable normale centrée réduite, $E[Z] = \mu = 0$ et $Var(Z) = 1$.

2. **2.** Quelle est la probabilité que la valeur absolue de cette tension dépasse 2σ ? Donnez votre réponse en fonction de la fonction de répartition $\Phi(a)$ de Z.
   ☞ $P(|X| > 2\sigma) = P(X < -2\sigma) + P(X > 2\sigma) = P(Z < -2) + P(Z > 2) = 2 \times \Phi(-2) = 2 \times (1 - \Phi(2))$

Exercice 8. *La loi triangulaire (3pt)*

La loi triangulaire est beaucoup utilisée en traitement du son. Notamment, soit X la variable aléatoire continue de densité $f_X(x)$ donnée par la formule

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}(a - |x|) & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où a est un paramètre strictement positif.

1. **1.** Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité. Rappel $\int |x|\, dx = \frac{x|x|}{2}$
   ☞

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} \frac{1}{a^2}(a - |x|)\, dx &= \frac{1}{a^2}\left[a \int_{-a}^{a} dx - \int_{-a}^{a} |x|\, dx\right] \\ &= \frac{1}{a^2}\left[ax\Big|_{-a}^{a} - \frac{x|x|}{2}\Big|_{-a}^{a}\right] \\ &= \frac{1}{a^2}\left[a^2 + a^2 - \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right)\right] \\ &= \frac{a^2}{a^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. **2.** Représenter cette densité sur un graphique avec X en abscisse et f_X en ordonnée
   ☞ Triangle de coordonnées $(-a, 0)$, $(a, 0)$ et $(0, 1/a)$.

3. **3.** Calculer l'espérance $E[X]$
   ☞

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-a}^{a} \frac{x}{a^2}(a - |x|)\, dx \\ &= \frac{1}{a^2}\left[a \int_{-a}^{a} x\, dx - \int_{-a}^{a} x|x|\, dx\right] \\ &= \frac{1}{a^2}\left[a\frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{a} - \frac{x^2|x|}{3}\Big|_{-a}^{a}\right] \\ &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{2} - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$