

# 1 TD 1. Combinatoire

## Rappels du cours

1. Principe fondamental de dénombrement (d'abord pour deux expériences, ensuite pour  $r$  expériences avec  $n_1, n_2, \dots, n_r$  résultats possibles pour chaque expérience) ;
2. Nombre de permutations de  $n$  objets discernables.
3. Nombre de permutations de  $n$  objets parmi lesquels  $n_1$  sont indiscernables entre eux,  $n_2$  sont indiscernables entre eux,  $\dots$ ,  $n_r$  objets sont indiscernables entre eux ;
4. Nombres d'arrangements et de combinaisons de  $r$  objets pris parmi  $n$  ;
5. Identités remarquables pour les combinaisons ;
6. Théorème du binôme ;
7. Coefficients multinomiaux ;
8. Nombre de solutions d'équations à valeurs entières.

**Exercice 1.1:** Combien de séries de résultats possibles y a-t-il si l'on jette un dé quatre fois ?  $n$  fois ?

**Exercice 1.2:** Combien existe-t-il de plaques minéralogiques à 7 caractères :

- (a) si les deux premiers sont des lettres et les 5 autres des chiffres ?
- (b) et en supposant que les répétition de lettres ou les chiffres sur la même plaque sont exclues ?

**Exercice 1.3:** John, Jim, Jay et Jack ont formé un orchestre, et ils disposent de 4 instruments : un piano, une batterie, une guitare et une basse. Si chacun des garçons peut jouer des 4 instruments, combien d'arrangements peut-on concevoir ? Que se passe-t-il si John et Jim peuvent jouer des 4 instruments mais si Jay et Jack ne savent jouer qu'au piano et à la batterie ?

**Exercice 1.4:** Combien d'anagrammes différents peut-on faire avec les mots *Mississippi*, *propose*, *arrange* ?

**Exercice 1.5:** Un groupe de 3 filles et 3 garçons vont au cinéma et s'assoient en rang.

- (a) Combien de rangs différents peuvent-ils former ?
- (b) Même question si les garçons doivent rester ensemble et les filles aussi.
- (c) Même question si seuls les garçons doivent rester ensemble.
- (d) Même question si deux personnes de même sexe doivent jamais voisiner.

**Exercice 1.6:** Nous disposons des ingrédients suivants pour faire des pizzas, outre la pâte et les olives :

Dessous : sauce tomate ou crème fraîche.

Fromages : emmental, mozzarella, bleu, chèvre, brousse

Légumes : tomates, aubergine, poivrons, oignons, champignons.

Viande : jambon, viande hachée, chorizo, poulet, anchois.

Dans la suite on vous demande à chaque étape du raisonnement de préciser la règle utilisée.

- (a) Combien y a-t-il de pizzas qui contiennent exactement un élément de chaque catégorie ?
- (b) Combien y a-t-il de pizzas contenant 2 légumes et un élément de chaque autre catégorie ?
- (c) Combien y a-t-il de pizzas contenant au plus 3 légumes et un élément de chaque autre catégorie ?
- (d) Les clients peuvent choisir les ingrédients de leur pizzas. Chaque pizza contient un ingrédient de chaque type (1 sauce, 1 légume, 1 fromage et 1 viande). Un client veut choisir deux pizzas de façon à ce qu'elles ne contiennent aucun ingrédient en commun. Combien de possibilités a-t-il ?

**Exercice 1.7:** On veut former un comité de 7 personnes, dont 2 républicains, 2 démocrates et 3 indépendants. On a le choix parmi les 5 républicains, 6 démocrates et 4 indépendants. Combien de comités différents peut-on former ?

**Exercice 1.8:** Une groupe de  $r$  personnes veut se partager  $n$  bouteilles identiques de vin.

1. Compter les possibilités de partager les bouteilles (en particulier, une personne peut boire tout le vin).
2. Compter les possibilités de partager les bouteilles telles que chaque personne reçoit au moins une bouteille.

**Exercice 1.9:** Vous voulez acheter 10 viennoiseries parmi des croissants, des pains au chocolat et des pains au raisin, combien avez vous de possibilités d'achat ?

**Exercice 1.10:** Huit nouveaux professeurs vont être envoyés dans 4 écoles.

- (a) Combien y a-t-il d'affectations possibles ?
- (b) Qu'en est-il si l'on impose que chaque école recevra exactement deux professeurs ?

**Exercice 1.11:** Si 12 personnes doivent être réparties en 3 comités comptant respectivement 3,4, et 5 individus, de combien de manières peut-on s'y prendre ?

**Exercice 1.12:** Développer  $(3x^2 + y)^5$ .