# 6 TD 6. Variables aléatoires continues

## Rappels du cours

1. Variable aléatoire continue $X$
2. Fonction de densité de probabilité $f(x)$ telle que $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$
3. Fonction de répartition $P\{X < a\} = P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$
4. Espérance $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ et variance $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
5. Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$
6. Loi uniforme : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $F(a) = \begin{cases} 0 & a \leq \alpha \\ \frac{a-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha < a < \beta \\ 1 & a \geq \beta \end{cases}$, $E[X] = \frac{\beta+\alpha}{2}$, $Var(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$
7. Loi normale : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)/2\sigma^2}$, $F(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^a e^{-(x-\mu)/2\sigma^2}$, $E[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$
8. Loi normale centrée réduite $Z$ : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2)/2}$, $F(a) = \Phi(a)$ (cf. table), $E[Z] = 0$, $Var(Z) = 1$
9. Loi exponentielle : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, $F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$, $E[X] = \frac{1}{\lambda}$, $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
10. Approximation normale d'une binomiale $S_n$ : $P\left\{a \leq \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right\} \to \Phi(b) - \Phi(a)$ quand $n \to +\infty$

**Exercice 6.1:** Soit $X$ une variable aléatoire dont la fonction de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{si} -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Quelle est la valeur de $c$ ?

(b) Quelle est la fonction de répartition de $X$ ?

**Exercice 6.2:** Pour fonctionner, un système utilise une cellule interchangeable. On dispose de la pièce originale et d'une cellule de rechange. Si le système a une durée de vie aléatoire $X$ et que sa densité de probabilité est donnée (en mois) par :

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

quelle est la probabilité que le système fonctionne pendant au moins 5 mois ?

**Exercice 6.3:** Démontrez que l'espérance $E[X]$ d'une variable aléatoire $X$ de loi uniforme définie sur l'intervalle $\alpha < X < \beta$ vaut $\frac{\beta+\alpha}{2}$.

**Exercice 6.4:** Une station service est approvisionnée en essence une fois par semaine. Si son volume de vente hebdomadaire, en milliers de litres, est une variable aléatoire de fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

quelle est la capacité que doit avoir le réservoir pour que la probabilité d'épuiser l'approvisionnement d'une semaine soit égal à 0,01 ?

**Exercice 6.5:** Calculer $E[X]$ et $Var(x)$ pour une variable aléatoire continue $X$ dont la fonction de distribution de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 6.6:** A partir de 7 heures, les bus passent toutes les 15 minutes à un arrêt donné. Ils passent donc à 7h00, 7h15, 7h30 et ainsi de suite. Un usager se présente entre 7h00 et 7h30 à cet arrêt, l'heure exacte de son arrivée étant une variable uniforme sur cette période :

(a) trouver la probabilité qu'il doive attendre moins de 5 minutes

(b) puis plus de 10 minutes.

**Exercice 6.7:** Soit X une variable aléatoire de paramètres $\mu = 3$ et $\sigma^2 = 9$. Calculer :

(a) $P\{2 < X < 5\}$,

(b) $P\{X > 0\}$,

(c) $P\{|X - 3| > 6\}$.

**Exercice 6.8:** Lors d'un procès en attribution de paternité, un expert témoigne que la durée de la grossesse, en jours, c'est-à-dire le laps de temps entre la conception et la naissance de l'enfant, est de distribution approximativement normale avec paramètres $\mu = 270$ et $\sigma^2 = 100$. L'un des pères putatifs est en mesure de prouver son absence du pays pendant une période s'étendant entre le 290-ième et le 240-ième jour précédant l'accouchement. Quelle est la probabilité que la conception de l'enfant ait eu lieu plus de 290 jours avant sa naissance ou moins de 240 jours avant ?

**Exercice 6.9:** Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'occurrences de pile lors d'une série de 40 jets. On veut calculer $P\{X = 20\}$ par approximation normale puis comparer le résultat à la valeur exacte.

**Exercice 6.10:** Démontrez que la fonction de répartition $F(a)$ d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramtrètre $\lambda$ est $1 - e^{-\lambda a}$

**Exercice 6.11:** On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{10}$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et quelqu'un passe juste devant vous. Avec quelle probabilité devrez-vous attendre :

(a) plus de 10 minutes ;

(b) entre 10 et 20 minutes ?

# Rappels calcul différentiel/intégral

## Propriétés des intégrales

1. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ tel que $F'(x) = f(x)$
2. $\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
3. $\int kf(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$
4. $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
5. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
6. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
7. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
8. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$
9. $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$
10. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$

## Quelques intégrales connues

1. $\int dx = x + C$
2. $\int k\,dx = kx + C$
3. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
4. $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, x \neq 0$
5. $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + C$
6. $\int e^x\,dx = e^x + C$
7. $\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$
8. $\int xe^{kx}\,dx = e^{kx}\left(\frac{kx-1}{k^2}\right) + C$
9. $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
10. $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

## Techniques d'intégration

— **Intégration par changement de variable (substitution) :**
$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$ avec $u = g(x)$ et $du = g'(x)dx$
<u>Exemple</u> : $\int_1^2 5x^2\cos(x^3)\,dx$, on choisit $u = x^3$ tel que $du = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}du$
Par conséquent, $\int_1^2 5x^2\cos(x^3)\,dx = \int_{1^3}^{2^3} \frac{5}{3}\cos(u)\,du = \frac{5}{3}[\sin(x)]_1^8$

— **Intégration par parties :**
$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$ avec $du = u'(x)$ et $v = \int dv$
<u>Exemple</u> : $\int xe^{-x}\,dx$, on choisit $u = x \Rightarrow du = dx$ et $dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$
Par conséquent, $\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx + C = -e^{-x}(x+1) + C$

## Table de la fonction de répartition $\Phi(x)$ de la loi normale centrée réduite

| $Z$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| .1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| .2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| .3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| .4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| .5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| .6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| .7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7703 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| .8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| .9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |
| 3.5 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 |
| 3.6 | .9998 | .9998 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 |
| 3.7 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 |
| 3.8 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Ligne : première décimale, colonne : deuxième décimale. P. ex. : $\Phi(1,67) = 0,9525$ (ligne 1.6, colonne .07)

**Rappels :**

$$P\{Z \le a\} = \Phi(a)$$
$$P\{Z > a\} = P\{Z \le -a\} = \Phi(-a)$$
$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$