Aix*Marseille université

Domaine Sciences et Technologies
Portail 1 René Descartes

Introduction à l'informatique : TD 8

Code UE : S14IN1I1

Année 2019-20

Graphes : modélisation et parcours

Exercice 1 (Le loup, le mouton, le chou et la bergère) Du temps de Pagnol, une bergère veut traverser la rivière Durance avec un chou, un mouton et un loup. Malheureusement, pas de pont à l'horizon et elle ne possède qu'une minuscule barque dans laquelle elle peut naviguer avec un seul de ses « compagnons » d'aventure. En sa présence, le mouton n'ose pas manger le chou, pas plus que le loup n'ose manger la chèvre, mais ils n'hésiteraient pas à satisfaire leurs appétits si la bergère tournait le dos. Comment doit-elle s'y prendre pour amener tout le monde de l'autre côté de la rivière ? Utilisons un graphe pour l'aider !

1. Quelles sont les configurations possibles de cette aventure ? On pourra les décrire en observant les personnages qui peuvent se trouver sur la rive de départ et la rive d'arrivée.
2. Modélisez alors le problème sous la forme d'un graphe dont les sommets sont les configurations possibles et les arêtes représentent l'évolution possible de l'aventure.
3. Résolvez le problème à l'aide d'un parcours du graphe précédent. Décrivez à la bergère les allers-retours qu'elle doit faire. Combien de traversées la bergère doit-elle faire ? Existe-t-il plusieurs solutions avec ce nombre minimal de traversées ?

Exercice 2 (Matrices d'adjacence) On a vu en cours qu'on pouvait représenter un graphe (orienté ou non) à l'aide d'une *matrice d'adjacence*. Il s'agit d'un tableau bidimensionnel M dont les lignes et les colonnes sont indexées par les sommets du graphe et tel que la case $M[u, v]$ (notée aussi $M[u][v]$ en Python) en ligne u et en colonne v vaut 1 dès lors qu'il existe un arc (u, v) ou une arête $\{u, v\}$ dans le graphe, et vaut 0 sinon. Les matrices d'adjacence des graphes non orienté (à gauche) et orienté (à droite) de la figure 1 sont

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par exemple, on a $M_1[2, 3] = 1$ signifiant qu'il existe une arête reliant les sommets 2 et 3 dans le graphe non orienté, et $M_2[2, 1] = 0$ signifiant qu'il n'y a pas d'arc allant de 2 à 1 dans le graphe orienté.

1. Comment sont reliées les valeurs $M[u, v]$ et $M[v, u]$ de la matrice d'adjacence M d'un graphe (non orienté), pour tous sommets u et v ?
2. Quelle propriété d'un graphe orienté est représentée par le fait que, dans sa matrice d'adjacence M, on a pour tout sommet u, $M[u, u] = 1$?

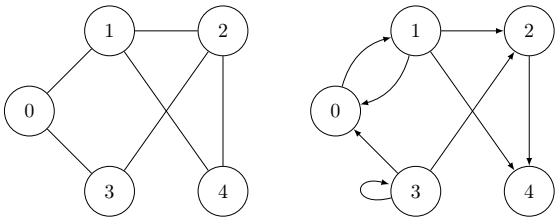


Figure 1 – À gauche : graphe (non orienté) G_1 d'ensemble de sommets $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et d'ensemble d'arêtes $A = \{\{0, 1\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}\}$. À droite : graphe orienté G_2 d'ensemble de sommets $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et d'ensemble d'arcs $A = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 0), (3, 2), (3, 3)\}$.

3. Dans un graphe non orienté, que vaut $M[u,u]$ pour tout sommet u ?

De la même manière qu'on a parcouru un tableau (unidimensionnel) à l'aide d'une boucle `Pour`, on peut parcourir toutes les cases d'une matrice (bidimensionnelle) à l'aide de deux boucles `Pour` imbriquées. Par exemple, si on souhaite vérifier qu'une matrice d'adjacence est symétrique, on peut utiliser le pseudo-code suivant :

```
Fonction est_symétrique(d M[0..n − 1,0..n − 1]: tab_entiers): booléen
    u, v: entier;
Début
    Pour u de 0 à n − 1 faire
       Pour v de 0 à n − 1 faire
          Si M[u,v] ≠ M[v,u] alors
             retour faux;
          Finsi
       Finfaire
    Finfaire
    retour vrai;
Fin
```

L'algorithme recherche une preuve de non symétrie de la matrice (auquel cas l'algorithme s'arrête en plein milieu en retournant `faux` dès que possible) : s'il n'a pas trouvé de preuve de non symétrie, c'est que la matrice est symétrique et on renvoie donc `vrai`.

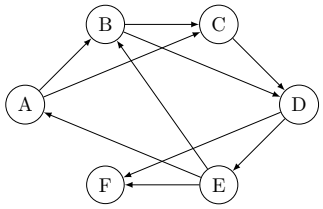
4. Notez qu'on fait deux fois trop de travail dans ce code, puisqu'on teste chaque couple de sommets (u,v) deux fois... Comment modifier le code pour faire mieux, en ne testant qu'une seule fois chaque couple ?
5. Écrivez un algorithme en pseudo-code, qui prend en entrée la matrice d'adjacence d'un graphe orienté, et renvoie le nombre d'arcs dans le graphe.
6. En utilisant l'algorithme précédent, écrivez un algorithme qui compte le nombre d'arête d'un graphe non orienté ?
7. Proposez une autre solution plus efficace, et expliquez pourquoi.

Exercice 3 (Parcours en largeur) En cours, nous avons décrit l'algorithme de parcours en largeur d'un graphe orienté G à partir d'un sommet s :

```
Fonction parcours_largeur(d G[1..n,1..n]: tab_entier, d s: entier): tab_entier
    i, u, v: entier;    H: tab_entier;
    F: file_entier;    couleur[1..n]: tab_couleur;
Début
    Pour i de 1 à n faire    couleur[i] := blanc;    Fin faire
    couleur[s] := vert;    F := ∅;
    enfiler(F, s);
    Tant que (F ≠ ∅) faire
       u := défiler(F);    couleur[u] := rouge;
       Pour v de 1 à n faire
          Si (G[u,v] = 1 et couleur[v] = blanc) alors
             couleur[v] := vert;
             H[u,v] := 1;
             enfiler(F, v);
          Fin si
       Fin faire
       couleur[u] := doré;
    Fin faire
    retour H;
Fin
```

Cet algorithme retourne le graphe H qui ne contient que les arcs traversés en parcourant un chemin minimal de s à chacun des autres sommets accessibles.

1. Exécutez l'algorithme de parcours en largeur sur le graphe G représenté ci-dessous à partir du sommet $s = A$, en montrant toutes les étapes de l'algorithme (avec la coloration des sommets et l'état de la file dans les configurations intermédiaires). Représenter aussi le graphe H retourné par la fonction.



2. Écrivez en pseudo-code une procédure `Procédure calculer_chemin(d` $H[1..n, 1..n]$`: tab_entier, d` s`,` t`: entier)` qui prend en argument le graphe des chemins minimaux H construit par la fonction `Fonction parcours_largeur(d` $G[1..n, 1..n]$`: tab_entier, d` s`: entier): tab_entier` et affiche à l'écran le chemin de H qui commence par le sommet s et se termine par le sommet t. Pour simplifier, on pourra afficher les sommets du chemin en ordre inverse ; par exemple, si le chemin entre s et t est $s \to u \to v \to t$, on pourra afficher "t v u s".

Exercice 4 (Plus court chemin) On a vu en cours un algorithme permettant de calculer des plus courts chemins dans des graphes pondérés. On décrit un graphe (orienté) pondéré à l'aide d'une matrice (un tableau bi- dimensionnel) d'adjacence G avec autant de lignes et de colonnes qu'il y a de sommets dans le graphe, et dont le coefficient pour u et v deux sommets vaut

$$G[u,v] = \begin{cases} \text{poids de } u \to v & \text{s'il y a un arc } u \to v \\ \infty & \text{s'il n'y a pas d'arcs } u \to v \end{cases}$$

Le poids d'un chemin $u_0 \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_{n-1} \to u_n$ du graphe (où $u_0 \to u_1$, $u_1 \to u_2$, …, $u_{n-1} \to u_n$ sont des arcs du graphe) est égal à la somme $G[u_0, u_1] + G[u_1, u_2] + \cdots + G[u_{n-1}, u_n] = \sum_{i=0}^{n-1} G[u_i, u_{i+1}]$. Un plus court chemin de u à v est un chemin menant de u à v dont le poids est minimal parmi tous les chemins possibles.

En cours, nous avons exécuté l'algorithme de Dijkstra. En voici une description sous forme de pseudo-code (notez la ressemblance avec le parcours en largeur, bien que nous n'ayons plus de graphe H mais deux nouveaux tableaux stockant respectivement les distances et les prédécesseurs) :

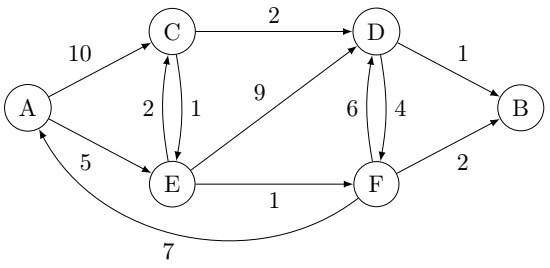
```
Procédure dijkstra(d G[1..n, 1..n]: tab_entier, d s: entier, r dist[1..n], pred[1..n]:
tab_entier)
    coul[1..n]: tab_entier;
    F: file_entier;
    u, v, p: entier;
Début
    F := init_file();                          crée une file de priorité vide de taille n
    coul := init_couleur();          crée un tab_couleur de taille n avec blanc partout
    dist := init_dist();                 crée un tab_entier de taille n avec ∞ partout
    pred := init_pred();                 crée un tab_entier de taille n avec −1 partout
    coul[s] := rouge;
    dist[s] := 0;
    enfiler_avec_priorite(F, s, 0);
    Tant que (F ≠ ∅) faire
       (u, p) := defiler_avec_priorite(F);
       Pour v de 1 à n faire
```

```
        Si (coul[v] = blanc et G[u,v] ≠ ∞) alors
            coul[v] := rouge;
            pred[v] := u;
            dist[v] := p + G[u,v];
            enfiler_avec_priorite(F, v, p + G[u,v]);
        Sinon si (coul[v] = rouge et p + G[u,v] < dist[v]) alors
            pred[v] := u;
            dist[v] := p + G[u,v];
            mettre_a_jour_priorite(F, v, p + G[u,v]);
        Fin si
      Fin faire
      coul[u] := vert;
   Fin faire
Fin
```

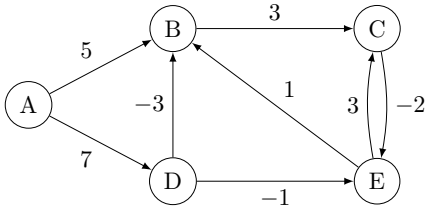
La file F est une file de priorité, c'est-à-dire que chacun de ses éléments est associé à une priorité (un entier positif ici) :

- lorsqu'on insère un nouvel élément s dans la file, on précise sa priorité $p \in \mathbb{N}$ à l'aide de la fonction `enfiler_avec_priorite`(F, s, p) ;
- l'élément prioritaire est celui de *plus petite priorité* : on peut récupérer cet élément ainsi que sa priorité à l'aide de la fonction $(u, p) :=$ `defiler_avec_priorite`(F) ;
- on peut mettre à jour la priorité d'un élément v de la file pour lui attribuer la nouvelle priorité p *si celle-ci est inférieure à la priorité initiale* de v dans F, à l'aide de la fonction `mettre_a_jour_priorite`(F, v, p).

1. Exécutez l'algorithme de Dijkstra en partant du sommet A sur l'exemple ci-dessous :



2. Déduisez-en un plus court chemin du sommet A au sommet B.
3. En cours, nous avons étudié uniquement des graphes pondérés avec des poids entiers positifs ou nuls : pourtant, on pourrait imaginer des graphes avec des poids négatifs, par exemple si le poids de l'arc représente des échanges d'argent (vente ou achat de produits). Exécutez l'algorithme de Dijkstra sur l'exemple ci-dessous en partant du sommet A où plusieurs arcs ont des poids négatifs :



4. Qu'en déduisez-vous sur l'algorithme de Dijkstra ?